Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 12, Mar. 2019

Published online in March

المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، المجلد الأول ـ العدد الثاني عشر، مارس 2019م

تقريب الدوال بكثيرات الحدود

Approximating functions by polynomials

حنان صالح أبوشحمة

قسم الرياضيات– كلية التربية– جامعة مصراتة

hanan.sal.ab33@gmail.com

منال الطاهر الزيداني

قسم الرياضيات– كلية التربية– جامعة مصراتة

manalezidani@gmail.com

الملخص:

تهدف هذه الورقة البحثية إلي دراسة بعض أنواع كثيرات الحدود الجبرية، التي تستعمل في تقريب الدوال وهي كثيرة حدود تايلور (Taylor polynomial) وماكلورين (Maclaurin polynomial)، وبعض كثيرات الحدود المتعامدة وهي (كثيرة حدود ليجيندر، وكثيرة حدود شيبيشف).

الكلمات المفتاحية: التقريب، كثيرة حدود تايلور، ماكلورين، الدوال المتعامدة.

Abstract:

The purpose of this paper is to study some types of algebraic polynomials that are used in approximation of functions. They are Taylor polynomial, Maclaurin polynomial, and some orthogonal polynomial (Chebyshev polynomial, Legendre polynomial).

(1) المقدمة:

في كثير من التطبيقات العملية يمكن أن نحصل على دوال معقدة وأحياناً غير مألوفة و بذلك ربما تصبح دراسة هذه الدوال من الموضوعات الصعبة و التي تستغرق الكثير من الوقت، كذلك يمكن أن نتقابل مع ما يسمى بالدوال المجدولة (Tabulated Function) أو دوال البيانات (Data Function) وهي تلك الدوال التي تكون على شكل ثنائيات مرتبة $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$.

لكل هذه الأسباب كان من الضروري تقريب هذه الدوال إلى دوال يسهل التعامل معها، وهنا ركزنا على دوال كثيرات الحدود وهي دوال بسيطة و متصلة و يمكن إجراء عمليات التفاضل و التكامل عليها، وينبغي تقديم النظرية الأساسية للتقريب (Fundamental Theorem)

نظرية 1 (نظرية وايرشتراس Werierstrass Theorem)

إذا أعطيت أية دالة $f(x)$ معرفة و متصلة على الفترة $[\propto, \beta]$ ، و كان $\propto > 0$ ، فإنه من الممكن إيجاد كثيرة حدود من الدرجة n نرمز لها بالرمز $P_n(x)$، بحيث يكون منحنى هذه الدالة قريباً بالدرجة المطلوبة من منحنى الدالة المعطاة، أي

$$|f(x) - P_n(x)| < \epsilon \qquad \forall x \in [\propto, \beta]$$

(2) تقريب الدوال بكثيرات الحدود

نظرية 2 (نظرية تايلور Taylor Theorem)

لنفرض أن $f(x)$ دالة معرفة و متصلة على الفترة $[\propto, \beta]$، و لنفرض أن المشتقات $f^{n+1}(x)$ حيث n عدد صحيح موجب لها وجود لكل $x \in [\propto, \beta]$. إذاً يمكن تقريب الدالة $f(x)$ على الصورة :

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \rightarrow 1$$

حيث يقع ξ بين x_0 و x، كما أن x_0 أي نقطة تنتمي للفترة المغلقة $[\propto, \beta]$.

يمكن من خلال النظرية السابقة الحصول على ثلاث صيغ تقريبية تسمى أشكال تايلور، هذه الأشكال هي على الترتيب مفكوك تايلور، كثيرة حدود تايلور، ومتسلسلة تايلور، في الحقيقة إن الطرف الأيمن من الصيغة الرياضية (1) يسمى مفكوك تايلور للدالة $f(x)$ حول نقطة الأساس أو المركز x_0 و أحياناً يقال مفكوك تايلور للدالة $f(x)$ في قوى $(x - x_0)$، أما الحدود $n + 1$ الأولى من المفكوك (1) تسمى كثيرة حدود تايلور من الدرجة النونية للدالة $f(x)$ حول نقطة الأساس x_0 و يرمز لها بالرمز $Q_n(x)$ و تأخذ الشكل

$$Q_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad \rightarrow 2$$

أو في صيغة أخرى

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i \qquad \forall i = 0, \dots, n \qquad \to 3$$

ومنها نجد أن

$$Q_n{}^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0) \qquad \forall i = 0, \dots, n \quad \to 4$$

نلاحظ أن الصورة (4) تعني أن المشتقة من أي درجة للدالة التقريبية $Q_n(x)$ تتساوى مع مشتقة الدالة الأصلية $f(x)$ من نفس الدرجة، عند نقطة الأساس، الأمر الذي يوضح حقيقة أن التقريب بواسطة كثيرة حدود تايلور يعطي دقة أكبر في الفترة الصغيرة التي تحتوي على النقطة الأساسية x_0 بينما يزداد الخطأ الناتج عن التقريب كلما بعدنا عن x_0 .

أيضاً فإن الحد $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ ، يسمى شكل لاجرانج للباقي (Lagrange Remainder Formula) و هو يعتبر الخطأ الناتج عن عملية التقريب و يرمز له بالرمز $R_n(x)$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad ; x \neq x_0 \qquad \to 5$$

الباقي (5) يقترب من الصفر عندما n يقترب من اللانهاية ، فان مفكوك تايلور (1) يتحول إلي متسلسلة تايلور

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \quad \to 6$$

وهي متسلسلة تقاربية في $(x - x_0)$ ، ويمكن بذلك تمثيل الدالة $f(x)$ بواسطة متسلسلة تايلور بالشكل:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \qquad \to 7$$

يمكن أيضا الحصول من نظرية تايلور على ما يسمى بأشكال ماكلورين و ذلك في حالة ما تكون نقطة الأساس عند الصفر أي $x_0 = 0$.

مثال 1

أوجد صورة تقريبية للدالة $f(x) = e^x$ المعرفة و المتصلة على الفترة $[0,1]$ ، وذلك على شكل كثيرة حدود تايلور $Q_n(x)$.

الحل

بالطبع يمكن أن نأخذ النقطة الأساسية x_0 أية نقطة في الفترة $[0,1]$. لكننا نجد من مفهوم نظرية تايلور أنه من المناسب أن نأخذ $x_0 = 1/2$ كنقطة أساسية (نقطة منتصف فترة تعريف الدالة).

إذاً من (4) نجد أن

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{e^{0.5}}{i!} (x - 0.5)^i$$

(3) التقريب باستخدام الدوال المتعامدة

هنا نستخدم نوعا آخر من الدوال يسمى الدوال المتعامدة (Orthogonal Functions) و خاصية تعامد هذه الدوال تسهل في عمليات تقريب الدوال بكثيرات الحدود، و يوجد الكثير من الدوال المتعامدة و سوف نستخدم نوعين منها وهي كثيرات حدود لجندر نسبة إلى عالم الرياضيات الفرنسي Legendre, 1752-1833 و النوع الثاني يسمي كثيرات حدود تشيبشيف، نسبة إلى عالم الرياضيات الروسي Chebyshev, P.L, 1821-1894.

تعريف 1 (الدوال المتعامدة)

لنفرض الدالتين $\Psi_1(x), \Psi_2(x)$ ، المعرفتين، و القابلتين للتفاضل و التكامل على الفترة المغلقة $[a,b]$ إذا كان

$$\int_a^b \omega(x)\, \Psi_1(x) \Psi_2(x) dx = 0 \qquad \rightarrow 8$$

حيث أن $\omega(x) > 0$ هي دالة التوازن القابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ فإنه يقال أن الدالة $\Psi_1(x)$ عمودية على الدالة $\Psi_2(x)$ في الفترة $[a,b]$ بالنسبة إلى دالة التوازن $\omega(x)$

مثال 2

حدد ما إذا كانت الدالتان

$$f(x) = x, \quad g(x) = \frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}$$

متعامدتان بالنسبة إلى دالة التوازن $\omega(x) = 1$ علي الفترة $[-1,1]$.

الحل

طبقا لخاصية (8) نوجد تكامل حاصل ضرب الثلاث دوال $f(x)\,, g(x)\,, \omega(x)$ على الفترة $[-1,1]$

$$\int_{-1}^{1} x(\frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2})\, dx = 0$$

إذا الدالتان $f(x)\,, g(x)$ متعامدتان.

تعريف 2 (كثيرات حدود تشيبشيف)

تعرف كثيرات حدود تشيبشيف من الدرجة n على أنها كثيرات الحدود

$$T_n(x) = \cos\big(ncos^{-1}(x)\big) \quad ; x \in [-1,1]\,, n > 0 \quad \to 9$$

حيث تأخذ صورتها الاختزالية الشكل

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad ; n \geq 1 \quad \to 10$$

و للحصول على كثيرات حدود تشيبشيف من الدرجة صفر و الدرجة الأولى نقوم بالتعويض في (9) عن $n = 0,1$ ، فنحصل على

$$T_0(x) = \cos(0) = 1, \qquad T_1(x) = cos\big(cos^{-1}(x)\big) = x$$

ولتسهيل حساب بقية كثيرات حدود تشيبشيف، نستخدم الصورة الرياضية الاختزالية المعطاة في (10) لنحصل على

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

وأيضاً

$$T_2(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$$

وهكذا يمكن على فئة لانهائية من كثيرات حدود تشيبشيف

$$T_n(x) = \{1, x, 2x^2 - 1{,}4x^3 - 3x, \dots\} \quad \to 11$$

تعريف 3 (كثيرات حدود لجندر)

تعرف كثيرة حدود لجندر من الدرجة n باستخدام شكل رودريج $Rodrigues$ على أنها

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n(n!)} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \qquad \to 12$$

أما الصورة الاختزالية لكثيرات حدود لجندر لكل $n \geq 1$ فنأخذ الشكل

$$(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x)=x(2n+1)P_n(x) \quad \rightarrow 13$$

باستخدام العلاقتين 12 و13 و التعويض عن $n=0,1,\ldots$ نحصل على فئة كثيرات حدود لجندر

$$P_n(x)=\{1,x,0.5(3x^2-1),\ldots\}$$

السؤال الذي يطرح نفسه الآن هو هل يمكن الاستفادة من خاصية التعامد لدوال مثل تشيبشيف و لجندر في الحصول علي تقريبات للدوال ؟ الاجابة عن هذا السؤال توضحها الطريقة التالية .

لنفرض أن المطلوب هو الحصول على دالة تقريبية للدالة $f(x)$ المتصلة و المعرفة على الفترة و ذلك باستخدام فئة كثيرات الحدود المتعامدة $\{\emptyset_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ على الفترة $[-1,1]$، إذا رمزنا للدالة التقريبية بالرمز $g(x)$ ، و يكون المطلوب هو الحصول على الدالة بحيث أن $f(x)\approx g(x)$.

الآن نفرض أن $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\emptyset_n(x) \quad \rightarrow 14$ ، حيث أن

$\{\emptyset_n(x)\}_{n=0}^{\infty}=\{\emptyset_0(x),\emptyset_1(x),\emptyset_2(x),\ldots\}$ هي فئة الدوال المتعامدة و المعروفة مثل دوال كثيرات حدود تشيبشيف أو دوال كثيرات حدود لجندر أو غيرها و لنفرض أن هذه الدوال تحقق خاصية التعامد

$$\int_{-1}^{1}\omega(x)\emptyset_n(x)\emptyset_m(x)dx=\begin{cases}0 & ; \quad n\neq m\\ \delta & ; \quad n=m\end{cases} \qquad \rightarrow 13$$

للحصول على الشكل النهائي للدالة $g(x)$ علينا أولاً أن نجد قيم المعاملات γ_n

بضرب المعادلة 13 في كثيرة الحدود $\emptyset_m(x)$ ، حيث m عدد ثابت و اجراء عملية التكامل على الفترة $[-1,1]$ نحصل على

$$\int_{-1}^{1}\omega(x)g(x)\emptyset_m(x)dx=\int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\omega(x)\emptyset_n(x)\emptyset_m(x)dx$$

$$=\gamma_0\int_{-1}^{1}\omega(x)\emptyset_0(x)\emptyset_m(x)dx+\gamma_1\int_{-1}^{1}\omega(x)\emptyset_1(x)\emptyset_m(x)dx+\cdots$$
$$\rightarrow 15$$

وطبقا لخاصية التعامد فإن كل حدود الطرف الأيمن من المعادلة 15 تكون مساوية للصفر ، إلا إذا كان $n=m$ و عندئذ فإن المعادلة تتحول إلى

$$\int_{-1}^{1} \omega(x)g(x)\emptyset_n(x)dx + \gamma_n \int_{-1}^{1} \omega(x)(\emptyset_n(x))^2 dx = \gamma_n \delta_n$$

و نستطيع الآن من المعادلة إيجاد الأخيرة المعاملات γ_n و ذلك من العلاقة التكاملية الآتية:

$$\gamma_n = \frac{1}{\delta_n} \int_{-1}^{1} \omega(x)g(x)\emptyset_n(x)dx \qquad \forall n = 0,1,2, \ldots \quad \rightarrow 16$$

و بحساب كل المعاملات $\{\gamma_n\}$ حيث $n \geq 0$ ، و التعويض عنهم، وعن كثيرات الحدود المتعامدة $\{\emptyset_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ في المعادلة 14 نحصل علي الدالة التقريبية $g(x)$ كتقريب للدالة $f(x)$ بواسطة كثيرات الحدود المتعامدة.

مثال 3

أوجد صورة تقريبية للدالة $f(x) = e^x$ و المعرفة على الفترة $[-1,1]$ وذلك باستخدام كثيرات حدد لجندر، ثم قارن النتائج مع تقريب كثيرة حدود ماكلورين $M_3(x)$ لنفس الدالة.

لتقريب $f(x)$ بكثيرات حدود لجندر، نفرض الشكل التالي:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)P_n(x) \qquad \rightarrow 17$$

حيث $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ هي كثيرات حدود لجندر. للحصول على المعاملات B_n نضرب طرفي المعادلة 17 في $P_m(x)$ حيث m عدد ثابت، ثم نجري عملية التكامل فنحصل على

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx = \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(x)P_m(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} B_0 P_0(x)P_m(x)dx + \int_{-1}^{1} B_1 P_1(x)P_m(x)dx + \cdots$$

و باستخدام خاصية التعامد لكثيرات حدود لجندر نجد أن كل الحدود علي الطرف الأيمن تؤول إلى الصفر ما عدا عندما $n = m$ وبذلك يكون

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx = 0 + \int_{-1}^{1} B_m(P_m(x))^2 dx = B_m(\frac{2}{2m+1})$$

و بالتالي فإن المعاملات B_m هي

$$B_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx \qquad ; m \geq 0$$

و إذا أخذنا ثلاثة حدود فقط من التقريب، نجد أن التقريب المطلوب سيأخذ الشكل

$$f(x) = \sum_{n=0}^{2} B_n P_n(x) = B_0P_0(x) + B_1P_1(x) + B_2P_2(x)$$

و بما أنه من المعادلة (12) نجد

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x; \quad P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$B_0 = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_0(x)dx = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^x(1) = \tfrac{1}{2}(e - \tfrac{1}{e})$$

$$B_1 = \tfrac{3}{2}\int_{-1}^{1} xe^x = \tfrac{3}{e};$$

$$= \frac{5}{2}\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^x\left(\tfrac{1}{2}(3x^2 - 1)\right) = \frac{5}{2}(e - \frac{7}{e})$$

و بالتالي فإن التقريب المطلوب هو

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) + \frac{3}{e}x + \frac{5}{2}(e - \frac{7}{e})\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$= \left(\frac{33}{4e} - \frac{3e}{4}\right) + \frac{3}{e}x + \left(\frac{15e}{4} - \frac{105}{4e}\right)x^2$$

أو

$$f(x) \approx 0.9963 + 1.1036x + 0.5367x^2$$

النتائج:

استنتجنا من خلال هذا البحث أنه يمكن تقريب الدوال المعقدة التي تواجهنا في بعض المسائل بكثيرات الحدود منها تايلور، وماكلورين، وأيضاً دوال لاجندر وتشيبشيف، وهي تعتبر من الدوال المتعامدة وخاصية التعامد هذه سهلت كثيراً عمليات التقريب.

المصادر والمراجع:

[1] رمضان جهيمة، وفاروق البرقي، (2000)، الجبر الخطي وتطبيقاته. دار الفكر العربي، لبنان.

[2] شكر الله، أميل، (2002)، الرياضيات الهندسية المتطورة. مؤسسة بيتر للطباعة.

[3] Goodaire, Edgar, (2003), Linear Algebra a pure and applied first course, Pearson Education.

[4] Lay, David, (2006). Linear Algebra and its Applications, Pearson Education.